

<研究ノート>

ウクライナ紛争に対する交戦ゲームの適用

宝崎 隆祐*

An application of the combat game to Russo-Ukrainian war

Ryusuke HOHZAKI *

抄 録

交戦状態を複数交戦主体間のゲームとして扱うのが交戦ゲームである。戦いの学術研究は古くからあるが、第2次大戦後に研究が盛んになったゲーム理論との出会いにより交戦ゲームの研究が開始された。戦いの特殊性から、戦いの多くの問題は完全に敵対的な二人のプレイヤー間の2人ゼロ和ゲームとして議論されてきた。この報告書は、ネットワーク表現された交戦空間でプレイされる交戦ゲームに関する Hohzaki らの一連の研究のモデルを、現在進行しているロシアとウクライナの間のウクライナ紛争の発端となったキーウ攻防戦に適用し、戦場における敵情報の価値を定量的に評価する。さらに、情報の価値取得を陽に組み込んだ新しいゲームモデルと解法についても提案する。

キーワード：ゲーム理論、交戦ゲーム、損耗、ネットワーク阻止

1. はじめに

この研究は、交戦ゲームの理論をウクライナ紛争の端緒の戦いとしてロシアとウクライナの間で行われたキーウ攻防戦に適用したものである。ゲーム理論とは、複数の意思決定者の存在する環境下で、各意思決定者にとって不確定な他者の意思決定を意識した行動がどうあるべきかを分析する手法である。

戦いの意思決定に関する本格的で学術的な研究は、モースとキンボールの共著である *Methods of Operations Research* [1] が始まりである。この著書は、第2次世界大戦中に誕

生し、連合国側の防空戦や対潜水艦戦で大いに効果があったオペレーションズ・リサーチの紹介本であるものの、戦後は特に産業界における効率的な生産増進に寄与する手法として広く普及した。この中で著者は、格子で表現した海峡を通峡しようとする潜水艦の阻止について、阻止側と潜水艦側双方の意思決定をゲーム理論を用いて分析している。

このような効果的な阻止を扱うゲームモデルである *Inspection* ゲーム (Hohzaki [2] 参照) は、軍縮問題や当事国査察の有効性を分析する目的で、囚人のジレンマモデルの考案者として有名な Dresher [3] によって始められた。

* 日本国際学園大学 経営情報学部、Japan International University

Inspection ゲームは1980年から1990年代に米国における麻薬密輸問題の分析に適用され、その研究には Thomas and Nisgav [4] 等がある。現実的な密輸問題を考えたとき、この問題はネットワーク表現された密輸ルート上での阻止問題として拡張され、Washburn and Wood [5] 等の研究対象となった。

上記の麻薬問題は、より一般的な問題として、ネットワーク上での阻止戦略を分析する *Network interdiction model* へと進展していく。この分析手法は、グラフ・ネットワーク理論の一般的な拡張問題 (Ford and Fulkerson [6]) から、攻撃に対する軍事輸送網やテロに対する施設の防御問題 (McMasters and Mustin [7]) や Desai and Sen [8])、感染ルートを考慮した流行病の阻止問題 (Assimakopoulos [9]) 等、多くの具体例への適用がなされている。

ネットワーク上での軍事的な *Interdiction model* として、ネットワーク上を進軍する攻撃側とその阻止を意図する守備側との交戦ゲームを学術的に取り扱ったのが Hohzaki and Chiba [10] である。この初期の交戦ゲームモデルでは、攻撃側はネットワークを経由してできるだけ多くの兵力を目的地へ到達させようとし、守備側は手持ち兵力をネットワークのアーキに分散配備して攻撃側の通過を阻止し、攻撃側残存数を少なくしようとする2人ゼロ和ゲームが提案されている。ネットワーク上で両者が衝突する地点では、古くから研究されている交戦理論であるランチェスターのルールにより両兵力が消耗してゆくとされた。

この基本モデルでは、攻撃側、守備側ともに相手情報を得ることなく、攻撃側の1本の進軍経路と守備側の兵力配備計画に関する1段階ゲームの均衡解を導出している。さらに、戦闘が進んだあるタイミングで攻撃側の位置と守備側の未配備兵力量を相手側が知って戦略を変更できる2段階モデルの均衡解も導出している。この基本モデルから、戦闘における現実的要素を考慮することで、相手側情報の種類や取得

のタイミング等について様々な拡張が行われ、また他の消耗ルールが加味されるなどの発展がなされ、Hohzaki and Sunaga [11] や Hohzaki and Higahio [12], Hohzaki and Tanaka [13] への研究に結びついている。また、攻撃側が複数出発点、複数目的地をもった交戦モデルが Hohzaki, Faugeras and Ouchi [14] によって提案されている。

論文 [14] の理論モデルを現実的な例に適用しようとしたのが、2023年にまとめられた工藤氏、日向野氏との卒業論文 [17, 18] である。後者は前者のモデルに時間的要素を加味して発展させたものであるが、ともにキウ攻防戦を適用例として取り上げている。この報告書は交戦ゲームの概要を紹介することを目的とし、Hohzaki, Faugeras and Ouchi の理論モデルとその発展モデルを扱った上記2つの卒業研究を取り上げ紹介するとともに、情報取得を陽に組み込んだ新しいゲームモデルと解法も提案する。

次の2節では、論文 [14] の基本モデルと均衡解の導出法を解説する。そのモデルでは、守備側が攻撃側の侵攻を待って防ごうとする静的な守備配備を扱う。それに対し、3節のモデルでは、攻撃側の侵入情報を得ることで、待機守備兵力を動的に派遣し、防衛兵力の効果的活用が可能なモデルである。両モデルの対比により、現にウクライナがキウ攻防戦で活用した偵察用ドローンにより取得する情報の有効性を定量的に明らかにできる。このような情報取得をゲームモデルに陽に組み込んだのが、4節のモデルである。以上の準備の下、5節では最初のモデルをキウ攻防戦に適用した工藤氏の卒業研究の適用例を取り上げ、その例に対し、第2のモデルの日向野氏のアプローチ法を適用することで、攻撃側情報の価値について分析する。このような情報取得を陽にモデルに取り込むべく、4節では2段階の新しい交戦ゲームモデルと解法を提示する。最後に、6節で本報告の総括を行う。

2. 複数出発地・複数目的地をもつ交戦ゲーム

ここでは、交戦ネットワーク上で攻撃側が複数出発ノードから複数目的ノードへ進軍しようとし、守備側はアーク上に初期兵力を配備して攻撃側進軍を阻止しようとする状況において、最終ノードに到達した攻撃側の総残存量を競う論文 [14] の1段階の2人ゼロ和ゲームのモデルを解説する。

- A1. ノード集合 N と有向アーク集合 A からなる閉路を持たないネットワーク $G(N, A)$ を交戦の空間とする。
- A2. 攻撃側及び守備側の2人のプレイヤーが存在する。攻撃側は複数ノード群 $S \subseteq N$ の各出発ノード $s \in S$ から初期兵力量 R_s で進軍を開始し、目的ノード群 T のいずれかへ到達しようとするが、分派して進軍することも許す。一方、守備側は初期兵力 B_0 を分割してアークに配置し、攻撃側に損耗を強いることで攻撃側の通過を阻止しようとする。
- A3. アーク上で攻撃側と守備側が出会った際の交戦で発生する両者の損耗は、交戦理

論におけるランチェスターの1次則を仮定する。すなわち、アーク $e \in A$ に流入した攻撃兵力 x と守備兵力 y が衝突した場合の攻撃側の残存量は、線形式で表される次式 $f_e(x, y)$ で与えられる。

$$f_e(x, y) = \max\{0, x - \gamma_e y\} \quad (1)$$

式 (1) の係数 γ_e は、アーク e における攻撃側戦力に対する防御側戦力の強さを表すパラメータであり、戦力交換比と呼ばれる。

- A4. 両プレイヤーの興味は、目的ノードに到達する攻撃側の最終残存量であり、攻撃側はそれを最大にしようとし、守備側はできるだけ小さくすることを目的とする。

式 (1) における攻撃側と守備側の損耗が比例する関係は、それぞれの軍の装備兵器の均一性、その発射速度や1発による相手への撃破確率が同じであるという仮定でシミュレーション実験をすることでも得られる。この式により攻撃側兵力が残れば、守備側兵力の全量が損耗していることになる。図1は上で定義した交戦ゲームモデルの概念図であり、これでおおよそのイメージが把握できるかと思う。

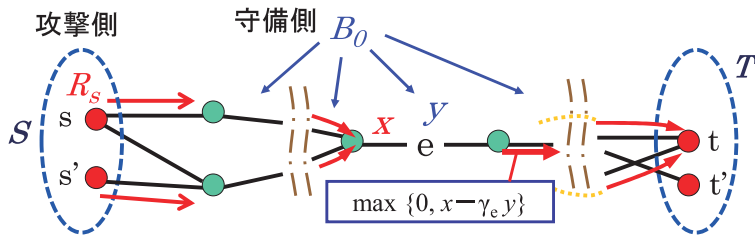


図1 交戦ゲームモデルの概念図

攻撃側の純粋戦略は複数の出発ノードから複数の目的ノードまで到達する進軍経路を1つ決めることであるが、ある1つの出発ノードからの攻撃兵力が途中で分かれる分派戦略は、1つの経路を通る全軍進軍戦略の混合戦略に弱

く支配されることが証明できる [14]。したがって、攻撃側の純粋戦略として、各々の出発ノード $s \in S$ から目的ノード群 T のいずれかのノードまでの1本のパスを選択して全軍進軍することのみを取り上げればよいが、異なる出発ノードか

らの攻撃兵力が途中で会合した場合には、それ以降同じ進軍経路をとるような経路でもある。

いま、出発ノード s から T のいずれかの目的ノードまで到達するパス集合を Ω_s で表すと、攻撃者の純粋戦略は直積 $\Omega \equiv \prod_{s \in S} \Omega_s$ の1つの要素 $l = (l_1, l_2, \dots) \in \Omega$ ($l_s \in \Omega_s$ は出発ノード s からの1本の進軍パス) を選択することであるが、この直積 Ω をその要素の中で一度同じノードに会合したパスは以後も同じ経路をとるパスの組だけを集めた集合に制限する。このようなパス組を、会合帯同条件を満たすパス組 (RPC; Rendezvous Path Combination) と呼ぶ。一方の守備側の純粋戦略は攻撃側の侵攻パスを予想して、あらかじめ防衛兵力をアークに配備する待受戦略であり、 $y = \{y_e, e \in A\}$ (y_e はアーク e に配備する守備兵力) で表すことができる。

1つのパス組 $l \in \Omega$ が与えられたとして、 l のノード及びアークから成るグラフを G_l とし、そのいずれかのパスが到達する目的ノードの集合を T_l で表そう。2つの到達ノード $t, t' \in T_l$ が異なれば、それぞれを根とするグラフは非連結である。 G_l はすべての出発ノード S を含むが、必ずしもすべての目的ノード T を含むとは限らない。ある到達ノード $t \in T_l$ に到る l から成る連結グラフは、 t を根とするツリー構造をもつ。根 t と葉以外のノードとして、2つ以上のパスが会合する度数3以上のノードとパスの経由地点のような度数2のノードがある。前者を会合ノード、後者を経由ノードと呼ぶ。葉は必ず出発ノードであるが、出発ノードは会合ノードにも経由ノードにもなり得る。

G_l から出発ノードでない経由ノードを削除したグラフを \hat{G}_l と書き、 \hat{G}_l におけるノードを \hat{N}_l とする。ある $t \in T_l$ に到るツリーを、 t を一番上に描き、会合ノードに集まるパスを下方に描くとしよう。すなわち、出発ノードから目的ノード t までの移動パスを常に上向きに描くものとする。任意のノード $k \in \hat{N}_l$ の上に描かれ次の隣接ノード $k' \in \hat{N}_l$ に至る区間はパスの会合はなく、元の

グラフ G_l において幾つかのアークを攻撃者が移動するパスの一部であり、この区間の G_l のアーク集合を M_k^l とし、ノード k の下に隣接した \hat{N}_l のノード集合を \hat{L}_k^l とする。 k が葉であれば $\hat{L}_k^l = \emptyset$ であり、根であれば $M_k^l = \emptyset$ である。図2はそのような攻撃パスの説明図である。

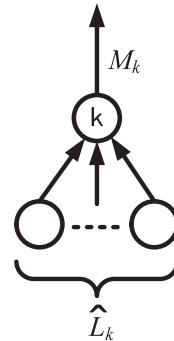


図2 攻撃パス

ここで、1つのパス組 $l \in \Omega$ から作られ、目的ノード $t \in T_l$ に至るグラフにおいて、守備側の配備 y があった場合の支払である最終的な攻撃側の総残存量の式を求める。

葉となるノード s は出発ノードであり、この s を出発する攻撃兵力は R_s である。ここで任意のノード $t \neq k \in \hat{N}_l$ 及びその上のアーク集合 M_k^l を移動後の攻撃側残存量 μ_k^l を求める。出発ノード $s \in S$ に関する残存量 μ_s^l は

$$\mu_s^l = \max\{0, R_s + \sum_{k \in \hat{L}_s^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_s^l} \gamma_e y_e\}$$

で求められ、出発ノードでない任意の会合ノード $d \in \hat{N}_l$ から M_d^l 通過直後の残存量は

$$\mu_d^l = \max\{0, \sum_{k \in \hat{L}_d^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_d^l} \gamma_e y_e\}$$

で表される。最終的に到着ノード t まで生き残る残存総量は次式となる。

$$\mu_t^l = \sum_{k \in \hat{L}_t^l} \mu_k^l$$

これらすべての $t \in \mathbf{T}_l$ の残存量の和である次式が、パス組 l を用いた移動の結果得られる攻撃側の総残存量であり、これがゲームの支払となる。

$$R(l, \mathbf{y}) = \sum_{t \in \mathbf{T}_l} \mu_t^l$$

ここで、攻撃側の混合戦略を、移動パス戦略 l を確率 $\pi(l)$ にとる混合戦略 $\pi \equiv \{\pi(l), l \in \Omega\}$ で表すと、 π と配備計画 \mathbf{y} による攻撃側の期待残存量、すなわちゲームの期待支払は次式で与えられる。

$$R(\pi, \mathbf{y}) = \sum_{l \in \Omega} \pi(l) R(l, \mathbf{y})$$

なお、攻撃側混合戦略 π と守備側の純粋戦略である守備計画 \mathbf{y} の実行可能領域 Π 、 Ψ は次式で表される。

$$\Pi = \left\{ \left\{ \pi(l), l \in \Omega \mid \sum_{l \in \Omega} \pi(l) = 1, \right. \right. \\ \left. \left. \pi(l) \geq 0, l \in \Omega \right\} \right\}$$

$$\Psi = \left\{ \left\{ y_e, e \in \mathbf{A} \mid \sum_{e \in \mathbf{A}} y_e \leq B_0, y_e \geq 0, e \in \mathbf{A} \right\} \right\}$$

以上が、交戦ゲームの基本モデルの記述と定式化の概要である。攻撃側及び守備側の合理的な戦略は、ゲームの均衡解を導出すればよい。ゲーム理論においてすべてのプレイヤーの最適戦略の組合せで表現される均衡解の合理性は、どのプレイヤーも現在の戦略を変えて均衡解の組合せから離脱しようとしても、決してそのプレイヤーの利得を増加させることができない（場合によっては利得が減少する）状況にあることにより保証される。この交戦ゲームの均衡解は、一般的なゲームと同様に、形式的には次の最適化問題を解くことで求められるものの、ほとんどのゲームの問題においても汎用的な解法は無く、モデルに応じた解法を著者みづからが提案しなければならぬ状況が多く、この問題でもそうである。

まず、守備側の最適戦略 \mathbf{y}^* は期待支払

$R(\pi, \mathbf{y})$ に対するミニマックス最適化問題 $\min_{\mathbf{y} \in \Psi} \max_{\pi \in \Pi} R(\pi, \mathbf{y})$ を解くことで、また攻撃側の最適混合戦略 π^* はマックスミニ最適化問題 $\max_{\pi \in \Pi} \min_{\mathbf{y} \in \Psi} R(\pi, \mathbf{y})$ を解くことで得られる。

論文 [14] で提案されている線形計画法の知見を用いた解法の詳細は割愛し、結果だけ述べてと、次のようになる。

守備側の最適戦略は、次の線形計画問題の最適解 \mathbf{y}^* により与えられる。

$$(P_B) \quad \min_{\mathbf{y}, \mu, \xi} \xi$$

制約条件：

$$\xi \geq \sum_{t \in \mathbf{T}_l} \mu_t^l, l \in \Omega,$$

$$\mu_t^l = \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_t^l} \mu_k^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega,$$

$$\mu_s^l \geq R_s + \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_s^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_s^l} \gamma_e y_e, s \in \mathbf{S}, l \in \Omega,$$

$$\mu_d^l \geq \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_d^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_d^l} \gamma_e y_e,$$

$$d \in \widehat{\mathbf{N}}_l, d \notin \mathbf{S}, d \notin \mathbf{T}_l, l \in \Omega,$$

$$\mu_k^l \geq 0, k \in \widehat{\mathbf{N}}_l, l \in \Omega,$$

$$\sum_{e \in \mathbf{A}} y_e \leq B_0,$$

$$y_e \geq 0, e \in \mathbf{A}.$$

また、攻撃側の最適混合戦略は、次の線形計画問題の最適解 π^* により与えられる。

$$(P_R) \quad \max_{\pi, \rho, \lambda} \sum_{s \in \mathbf{S}} R_s \sum_{l \in \Omega} \rho_s^l - B_0 \lambda$$

制約条件：

$$\rho_t^l = \pi(l), t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega,$$

$$\rho_{k'}^l \leq \rho_k^l, k' \in \widehat{\mathbf{L}}_k^l, k \in \widehat{\mathbf{N}}_l, l \in \Omega,$$

$$\gamma_e \sum_{\{(l,k) \mid e \in M_k^l, l \in \Omega\}} \rho_k^l \leq \lambda, e \in \mathbf{A},$$

$$\sum_{l \in \Omega} \pi(l) = 1,$$

$$\rho_k^l \geq 0, k \in \widehat{\mathbf{N}}_l, l \in \Omega.$$

3. 時間要素を考慮したモデル

2節では、守備側はネットワーク上に兵力を配備して攻撃側を待ち構えるモデル（待受守備戦略のモデル）を扱った。この静的守備計画に対し、この節では、守備側は待機兵力をもち、ドローン等を活用して得た攻撃側位置情報に基づき、動的に待機守備兵力を現地に派遣できるモデル（動的派遣守備戦略のモデル）を考える。そのため、2節の基本モデルを、攻撃側の侵攻時間や待機守備兵力の派遣時間といった時間要素も加味したモデルに修正する。具体的には、2節における前提 A2のみを次の前提で置き換える。

A2'. 攻撃側及び守備側の2人のプレイヤーが存在する。攻撃側は複数ノード群 $S \subseteq N$ の各出発ノード $s \in S$ から初期兵力量 R_s で進軍を開始し、目的ノード群 T のいずれかへ到達しようとするが、分派して進軍することも許す。攻撃側の侵攻経路の情報が得られれば、その移動時間は推定可能である。

一方、守備側は初期兵力 B_0 をアークに直接配備して攻撃側を待ち伏せることも、待機ノード群 W に待機させ、攻撃側位置情報を得て現場に急派させることも可能である。ただし、アークへの事前配備兵力は移動させられない。待機ノード $r \in W$ からアーク e への派遣には、兵力量にかかわらず時間 $D(r, e)$ を要する。攻撃側通過前に配置及び派遣された守備兵力により、攻撃側に損耗を強いることでその通過を阻止しようとする。

パス組 l の中でアーク e を通過するパス群を $\Omega_l(e)$ で表す。また、守備側が攻撃者の位置情報を得た時点から、アーク e を通過する幾つかのパス群 L を進軍中の攻撃側が合同してアーク e に到達するまでの時間を $C(L, e)$ とする。

このモデルでは、前節と同じく、攻撃側の純粋戦略は進軍のためのパス組 $l \in \Omega$ を1つ選択することであり、その混合戦略を確率 π で表す。一方の守備側の戦略は、アークと待機ノードへの初期配備及び攻撃者の侵攻情報を得た後の待機ノードからの再配備計画である。初期配備を、アーク e 及び待機ノード r への配備兵力量 y_e, y_r から成る $\mathbf{y} = \{y_e, y_r, e \in \mathbf{A}, r \in \mathbf{W}\}$ で表す。守備側の得る攻撃側情報は攻撃側が現に移動しているパス組 l であるとし、この情報を得た後の再配備計画を $\mathbf{z} = \{z_l(r, e), r \in \mathbf{W}, e \in \mathbf{A}, l \in \Omega\}$ で表す。 $z_l(r, e)$ は、パス組 l の侵入情報を得た場合の待機ノード r からアーク e への再配備兵力量である。 \mathbf{z} の実行可能性条件は次式で表される。

$$\sum_{e \in A} z_l(r, e) = y_r, \quad r \in \mathbf{W}, \quad l \in \Omega$$

以上の攻撃側戦略 π と守備側戦略 \mathbf{y}, \mathbf{z} をもつ交戦ゲームに対する均衡解の導出は、2節の基本モデルよりは複雑であるが、その手順は同じであり、均衡解を構成する守備側の最適戦略 $\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*$ を求める線形計画問題は、次のように得られる。

$$(P_B^T) \quad \min_{z, y, \xi, v, \mu} \quad \xi$$

制約条件：

$$\begin{aligned} \xi &\geq \sum_{t \in T_l} v_t^l, \quad l \in \Omega, \\ v_t^l &= \sum_{k \in \hat{L}_t^l} \mu_k^l, \quad t \in T_l, l \in \Omega, \\ \mu_s^l &\geq R_s + \sum_{k \in \hat{L}_s^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_s^l} \gamma_e \left(y_e \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{r \in W | C(l, e) \geq D(r, e) \\ s \in S_l^l, t \in T_l, l \in \Omega}} z_l(r, e) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu_s^l &\geq 0, \quad s \in \mathbf{S}_t^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega, \\ \mu_d^l &\geq \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_d^l} \mu_k^l - \sum_{e \in M_d^l} \gamma_e \left(y_e \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r \in W | C(l,e) \geq D(r,e)} z_l(r,e) \right), \\ &\quad d \in \mathbf{R}_t^l, d \notin \mathbf{S}_t^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_d^l &\geq 0, \quad d \in \mathbf{R}_t^l, d \notin \mathbf{S}_t^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega, \\ \sum_{e \in A} z_l(r,e) &= y_r, \quad r \in \mathbf{W}, l \in \Omega, \\ \sum_{e \in A} y_e + \sum_{r \in \mathbf{W}} y_r &\leq B_0, \\ y_e &\geq 0, \quad e \in \mathbf{A}, \quad y_r \geq 0, \quad r \in \mathbf{W}, \\ z_l(r,e) &\geq 0, \quad r \in \mathbf{W}, e \in \mathbf{A}, l \in \Omega, \\ z_l(r,e) &= 0, \quad r \in \mathbf{W}, e \notin \widehat{\mathbf{A}}_l, l \in \Omega. \end{aligned}$$

式 (2), (3) には、アーク e への攻撃側到着以前に再配備が可能な待機ノードからの増援が考慮されている。

攻撃側期待残存量のマックスミニ最適化により、攻撃側の最適なパス選択確率 π^* を与える次の線形計画問題が作成できる。

$$(P_R^T) \quad \max_{\pi, \rho, \sigma, \lambda} \sum_{l \in \Omega} \sum_{s \in S} R_s \rho_s^l - B_0 \lambda$$

制約条件：

$$\begin{aligned} \rho_k^l &\leq \pi(l), \quad k \in \widehat{\mathbf{L}}_t^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega, \\ \rho_{k'}^l &\leq \rho_k^l, \quad k' \in \widehat{\mathbf{L}}_t^l, k \in \widehat{\mathbf{N}}_t^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega, \\ \gamma_e \sum_{(l,k) \in M_k^l, l \in \Omega} \rho_k^l &\leq \lambda, \quad e \in \mathbf{A}, \\ \sum_{l \in \Omega} \sigma_r^l &\leq \lambda, \quad r \in \mathbf{W}, \\ \gamma_e \sum_{k \in M_k^l, C(l,e) \geq D(r,e)} \rho_k^l &\leq \sigma_r^l, \\ &\quad r \in \mathbf{W}, e \in \widehat{\mathbf{A}}_l, l \in \Omega, \\ \rho_k^l &\geq 0, \quad k \in \widehat{\mathbf{N}}_t^l, t \in \mathbf{T}_l, l \in \Omega, \\ \sum_{l \in \Omega} \pi(l) &= 1. \end{aligned}$$

4. 情報取得のある2段階モデル

ここでは攻撃側が出発ノード群から目的ノード群へ移動する途中で最大で1度、両プレイヤーが情報取得できる2段階ゲームを議論する。情報取得の後、両プレイヤーはその戦略を変更できる。攻撃側が \mathbf{S} を出発してから情報取得までを第1ステージ、情報取得後、攻撃側がその残存量をもって出発し目的ノード群 \mathbf{T} に到着するまでを第2ステージと呼ぶ。2節の前提に次を追加する。

(S1) 攻撃側が最初にパス組 $l_R \in \Omega$ をとって移動している場合、このパス組上に存在するノードの集合 I_{l_R} (Inf ノードと呼ぶ) で、両プレイヤーは同時に次の情報を獲得する。攻撃側は、以後の守備に配備できる守備側の残存守備量を、守備側は、攻撃側がノード群 I_{l_R} に存在し、そのノード $s \in I_{l_R}$ で残存量 $Q_s^{l_R}$ を有していることを知る。

このような2段階ゲームを解くには、第1ステージでの最適戦略を、それを採用することにより第2ステージという将来にどのようなゲームを両プレイヤーがプレイすることになるか及びその結果を推定した上で、決定することになる。まず、第1ステージでの攻撃側の混合戦略を $\pi \equiv \{\pi(l_R), l_R \in \Omega\}$ で、守備側の純粋戦略を $\mathbf{y}^{(1)} \equiv \{y_e^{(1)}, e \in \mathbf{A}\}$ で表す。 $\pi(l_R)$ は第1ステージでパス組 $l_R \in \Omega$ を選択する確率、 $y_e^{(1)}$ はアーク e 上への守備側配備量である。ステージ1で攻撃側がパス組 l_R を選択した場合、第2ステージで選択可能な攻撃側のノード群 I_{l_R} から出発するパス組の集合を $\Omega_{l_R}^{(2)}$ で表す。

さて、第1ステージでの攻撃側パス組 l_R と守備側戦略 $\mathbf{y}^{(1)}$ が決まれば、第2ステージ初期にノード $s \in I_{l_R}$ から出発する攻撃側残存量 $Q^{l_R} = \{Q_s^{l_R}, s \in I_{l_R}\}$ は、2節の定式化 (P_B) を用いた次の最小化問題からも求められる。

$$(P(\mathbf{l}_R, \mathbf{y}^{(1)})) \min_{Q, \mu} \sum_{t_1 \in T_{l_R}} Q_{t_1}^{l_R}$$

制約条件:

$$Q_{t_1}^{l_R} = \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_{t_1}^{l_R}} \mu_k^{l_R}, t_1 \in \mathbf{T}_{l_R},$$

$$\mu_{s_1}^{l_R} \geq R_{s_1} + \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_{s_1}^{l_R}} \mu_k^{l_R} - \sum_{e \in M_{s_1}^{l_R}} \gamma_e y_e^{(1)}, s_1 \in \mathbf{S},$$

$$\mu_d^{l_R} \geq \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_d^{l_R}} \mu_k^{l_R} - \sum_{e \in M_d^{l_R}} \gamma_e y_e^{(1)},$$

$$d \in \widehat{\mathbf{N}}_{l_R}, d \notin \mathbf{S}, d \notin \mathbf{T}_{l_R},$$

$$\mu_d^{l_R} \geq 0, d \in \widehat{\mathbf{N}}_{l_R}, d \notin \mathbf{T}_{l_R},$$

$$\sum_{e \in \mathbf{A}} y_e^{(1)} \leq B_0,$$

$$y_e^{(1)} \geq 0, e \in \mathbf{A}.$$

攻撃側のステージ1でのパス組 \mathbf{l}_R と守備側戦略 $\mathbf{y}^{(1)}$ の選択により、ステージ2でのゲームは、出発ノード群 \mathbf{I}_{l_R} から目的ノード群 \mathbf{T} までのネットワーク上で、攻撃側の初期量 Q^{l_R} と守備側の初期量 $B^{(2)} (= B_0 - \sum_{e \in \mathbf{A}} y_e^{(1)})$ でプレイされることは両プレイヤーとも知っている。この場合のゲームの値 ξ_{l_R} は、2節の問題 (P_B) において、 \mathbf{S} , Ω , R_s 及び B_0 のそれぞれを、 \mathbf{I}_{l_R} , $\Omega_{l_R}^{(2)}$, Q^{l_R} 及び $B^{(2)}$ 置き換えることで得られる。したがって、ステージ1で攻撃側の混合戦略 $\pi = \{\pi(\mathbf{l}_R), \mathbf{l}_R \in \Omega\}$ と守備側戦略 $\mathbf{y}^{(1)}$ による期待支払は、

$$R(\pi, \mathbf{y}^{(1)}) = \sum_{l_R \in \Omega} \pi(\mathbf{l}_R) \xi_{l_R} \quad (4)$$

で表される。期待支払 (4) 式のミニマックス最適化は、

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}^{(1)}} \max_{\pi} R(\pi, \mathbf{y}^{(1)}) &= \min_{\mathbf{y}^{(1)}} \max_{\pi} \sum_{l_R \in \Omega} \pi(\mathbf{l}_R) \xi_{l_R} \\ &= \min_{\mathbf{y}^{(1)}} \max_{l_R \in \Omega} \xi_{l_R} = \min_{\mathbf{y}^{(1)}} \{q | q \geq \xi_{l_R}, \mathbf{l}_R \in \Omega\} \end{aligned}$$

と変形できるが、上述した ξ_{l_R} の導出もいっしょに定式化すれば、ミニマックス最適化は次の線形計画問題に定式化できる。これを解けば、守備側のステージ1での最適

戦略 $\mathbf{y}^{*(1)} = \{y_e^{*(1)}, e \in \mathbf{A}\}$ とステージ2での最適戦略 $\mathbf{y}^{*(2)} = \{\mathbf{y}^{*l_R}, \mathbf{l}_R \in \Omega\}$ (ただし、 $\mathbf{y}^{*l_R} = \{y_e^{*l_R}, e \in \mathbf{A}\}$ である)、第2ステージ終了時点でのゲームの値 q^* も導出できる。

$$(P_B^2) \min_{y, q, \xi, \mu, Q} q$$

制約条件:

$$q \geq \xi_{l_R}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\xi_{l_R} \geq \sum_{t \in T_l} \mu_t^{l_R l}, \mathbf{l} \in \Omega_{l_R}^{(2)}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\mu_t^{l_R l} = \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_t^{l_R l}} \mu_k^{l_R l}, t \in \mathbf{T}_l, t \notin \mathbf{I}_{l_R}, \mathbf{l} \in \Omega_{l_R}^{(2)}, \mathbf{l}_R \in \Omega$$

$$\mu_s^{l_R l} \geq Q_s^{l_R} + \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_s^{l_R l}} \mu_k^{l_R l} - \sum_{e \in M_s^{l_R l}} \gamma_e y_e^{l_R},$$

$$s \in \mathbf{I}_{l_R}, \mathbf{l} \in \Omega_{l_R}^{(2)}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\mu_d^{l_R l} \geq \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_d^{l_R l}} \mu_k^{l_R l} - \sum_{e \in M_d^{l_R l}} \gamma_e y_e^{l_R},$$

$$d \in \widehat{\mathbf{N}}_l^{(2)}, d \notin \mathbf{I}_{l_R}, d \notin \mathbf{T}_l, \mathbf{l} \in \Omega_{l_R}^{(2)}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\mu_d^{l_R l} \geq 0, d \in \widehat{\mathbf{N}}_l^{(2)}, \mathbf{l} \in \Omega_{l_R}^{(2)}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\sum_{e \in \mathbf{A}} y_e^{l_R} \leq B_0 - \sum_{e \in \mathbf{A}} y_e^{(1)}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$y_e^{l_R} \geq 0, e \in \mathbf{A}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$Q_{t_1}^{l_R} = R_{t_1} + \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_{t_1}^{l_R}} \mu_k^{l_R}, t_1 \in \mathbf{I}_{l_R} \cap \mathbf{S}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$Q_{t_1}^{l_R} = \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_{t_1}^{l_R}} \mu_k^{l_R}, t_1 \in \mathbf{I}_{l_R}, t_1 \notin \mathbf{S}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\mu_{s_1}^{l_R} \geq R_{s_1} + \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_{s_1}^{l_R}} \mu_k^{l_R} - \sum_{e \in M_{s_1}^{l_R}} \gamma_e y_e^{(1)},$$

$$s_1 \in \mathbf{S}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\mu_d^{l_R} \geq \sum_{k \in \widehat{\mathbf{L}}_d^{l_R}} \mu_k^{l_R} - \sum_{e \in M_d^{l_R}} \gamma_e y_e^{(1)},$$

$$d \in \widehat{\mathbf{N}}_{l_R}^{(1)}, d \notin \mathbf{S}, d \notin \mathbf{T}_{l_R}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\mu_d^{l_R} \geq 0, d \in \widehat{\mathbf{N}}_{l_R}^{(1)}, d \notin \mathbf{T}_{l_R}, \mathbf{l}_R \in \Omega,$$

$$\sum_{e \in \mathbf{A}} y_e^{(1)} \leq B_0,$$

$$y_e^{(1)} \geq 0, e \in \mathbf{A}.$$

攻撃側の最適戦略を導出するには、期待支払 (4) 式のマクスマニ最適化問題を解くことになるが、紙数の関係でこれは省略する。

5. 交戦ゲームのキーウ攻防戦への適用

交戦ゲームのキーウ攻防戦への適用例を記述するに先立ち、それは必ずしも正確なデータに基づくものでないことを断っておく。ウクライナ紛争が集結していない現状では、この攻防戦における正確なデータは分からず、また、2節で解説したモデルでも明らかなように、敵対する二者はその強さの戦力比でのみ把握されている。現実の兵力装備や兵種構成等から、これらの係数がどうなるかの研究は、戦争教訓を残すためのライブラリーに蓄積され続けていて [15]、交戦理論が多くの戦史の結果予測に応用できる、できないの検証が今も続いている（例えば硫黄島の戦い [16] 等）。ここでの適用例は、交戦ゲームのモデルにより、キーウ攻防戦で多用された哨戒用ドローンによるロシア軍の動静の把握がどの程度の効果をもたらすかの定量的な分析の可能性を示すものである。

現在進行中のウクライナ紛争は、ロシアのプーチン大統領が現地時間 2022 年 2 月 24 日午前 10 時に国営テレビを通じて軍の特殊作戦を開始するとその布告で開始された。その初戦はウクライナの首都キーウをめぐる攻防戦である。25 日にはキーウ近郊の数か所の飛行場がロシア先発隊に占拠され、市内への砲撃や散発的な市街戦に対しウクライナ軍はよくもちこたえ、その後キーウを囲むいくつかの防衛線を構築したものの、その背後ではロシア軍主力がキーウに通じるドニエプル川北部に沿って侵攻中であった。その後数日のうちに、キーウ北東部に位置するチェルニヒ

ウもロシア軍に包囲され、東部ハルキウやスムイへの侵入やザポリージャ原子力発電所の占拠等も続き、ウクライナ軍からの強い反撃がなければ、東部からキーウへの侵攻も心配される状況にあった。以上のような戦況を経て、4 月 2 日には首都キーウ及びキーウ州全域のロシア軍からの奪還が公式に宣言され、以後は主としてロシアとの国境沿いに戦域が移ることになる。

さて、上述したキーウ攻防戦の戦況に基づき、工藤氏の卒業研究 [17] では、図 3 の航空写真（出典：google map）で表されるキーウの北部、東部を戦域として取り上げた。左下にキーウ市が位置している。

図 4 は、主としてロシア軍機械化部隊の侵攻路となる道路網を表現するネットワークであり、北のチェルニヒウ、北東のボルズナ、東のプリルキをロシア軍の侵入ノード、キーウを目的ノードとしている。今 3 か所の侵入ノードから同時にロシア軍の侵攻が開始され、しばらく時間が経ち、キーウ市を含む点線で囲まれた領域までロシア軍が迫ってきた状況での交戦ネットワーク $G(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ を表したのが図 5 である。図には反撃の無い状況でのロシア軍機械化部隊の移動距離（移動時間）を単位 km と h でアーク横に記している。ロシア軍の電撃戦により、ウクライナ軍は広く兵力を配備できず、キーウ近郊であるノード 1、2、3 に兵力を集結させているとする。

図 5 により、2 節の基本モデル及び 3 節の拡張モデルにおけるパラメータを確認しておく。ノード集合は 9 個のノードから成る $\mathbf{N} = \{1, \dots, 9\}$ であり、アーク集合は 10 本のアークから成る $\mathbf{A} = \{(2, 1), (6, 1), (3, 1), (5, 2), (4, 2), (4, 3), (9, 3), (5, 4), (8, 4), (7, 5)\}$ である。各アーク $e \in \mathbf{A}$ の戦力交換比 γ_e は表 1 のとおり、キーウに近いほど守備側は頑強とした。

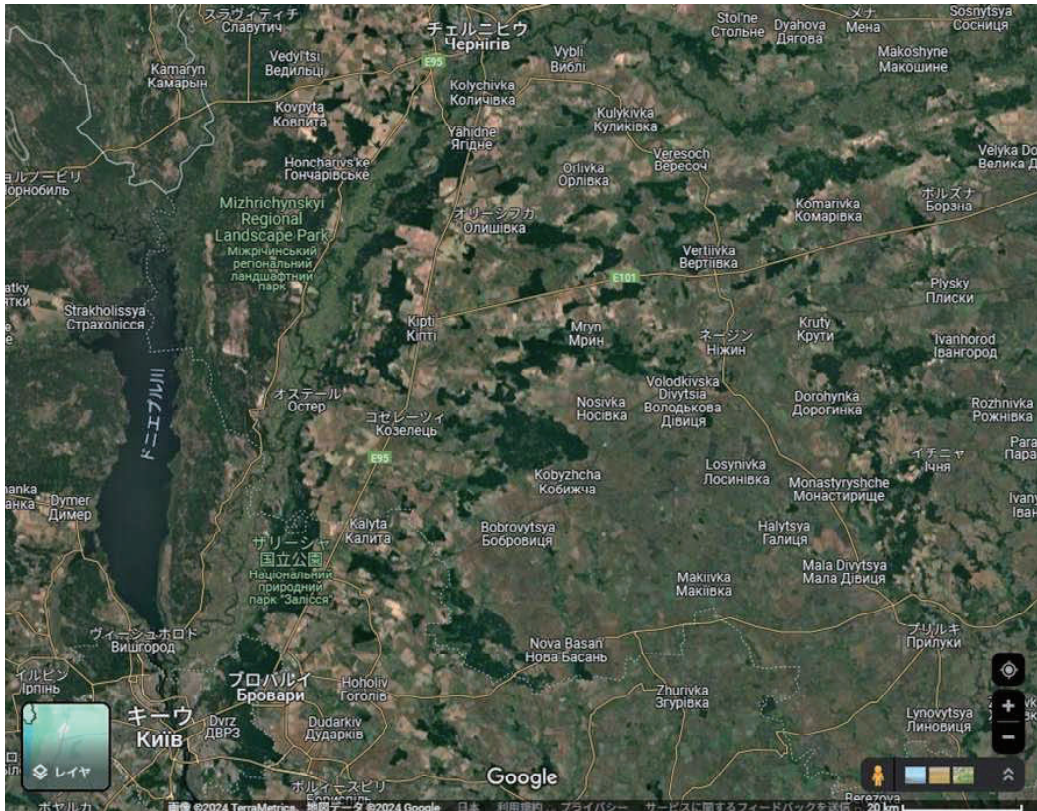


図3 戦域の航空写真

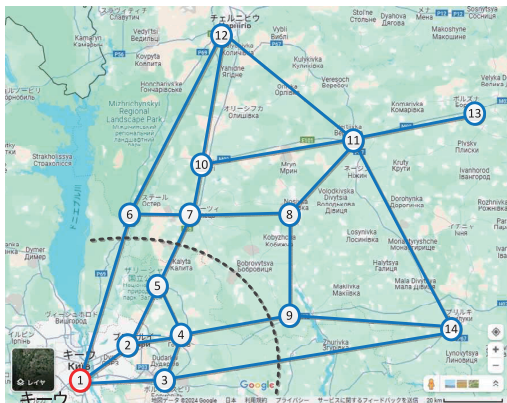


図4 戦域のネットワーク

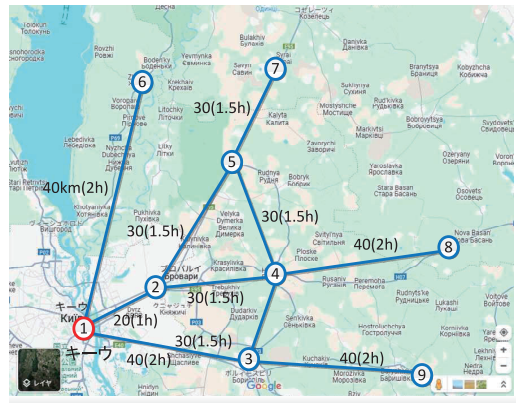


図5 対象とする交戦ネットワーク

表1 戦力交換比 γ_e

e	(2, 1)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 2)	(5, 2)	(5, 4)	(6, 1)	(7, 5)	(8, 4)	(9, 3)
γ_e	2	2	1.5	1.5	1.5	1.2	1.5	1.2	1.2	1.5

攻撃側の4つの出発ノードは $S = \{s_1 = 6, s_2 = 7, s_3 = 8, s_4 = 9\}$ 、目的ノードはキーウを示す $T = \{1\}$ である。4つの出発ノードから侵入する攻撃側兵力量は適切な単位設定の下、 $R_6 = 10, R_7 = 30, R_8 = 30, R_9 = 10$ であるとする。各出発ノード s から目的ノードに至る主要な進軍パス Ω_s は、 $\Omega_6 = \{l_1^6 = (6, 1)\}$, $\Omega_7 = \{l_1^7 = (7, 5, 2), l_2^7 = (7, 5, 4, 2, 1), l_3^7 = (7, 5, 4, 3, 1)\}$, $\Omega_8 = \{l_1^8 = (8, 4, 2, 1), l_2^8 = (8, 4, 3, 1)\}$, $\Omega_9 = \{l_1^9 = (9, 3, 4, 2, 1), l_2^9 = (9, 3, 1)\}$ である。ただし、 l_k^i は i 番目出発ノードからの k 番目進軍パスを表す。

進軍パスの組合せとしては12組が考えられるが、会合帯同条件を満たすパス組 (RPC) は次の6組 $l_1 \sim l_6$ である： $\Omega = \{l_1 = (l_1^1, l_2^1, l_3^1, l_4^1), l_2 = (l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2), l_3 = (l_1^3, l_2^3, l_3^3, l_4^3), l_4 = (l_1^4, l_2^4, l_3^4, l_4^4), l_5 = (l_1^5, l_2^5, l_3^5, l_4^5), l_6 = (l_1^6, l_2^6, l_3^6, l_4^6)\}$ 。それを図示したのが、図6である。また動的派遣守備のモデルでは、待機ノードはキーウ近郊地点の $W = \{1, 2, 3\}$ であり、攻撃側の進軍所要時間や守備兵の派遣時間は図5の時間を基に計算した。

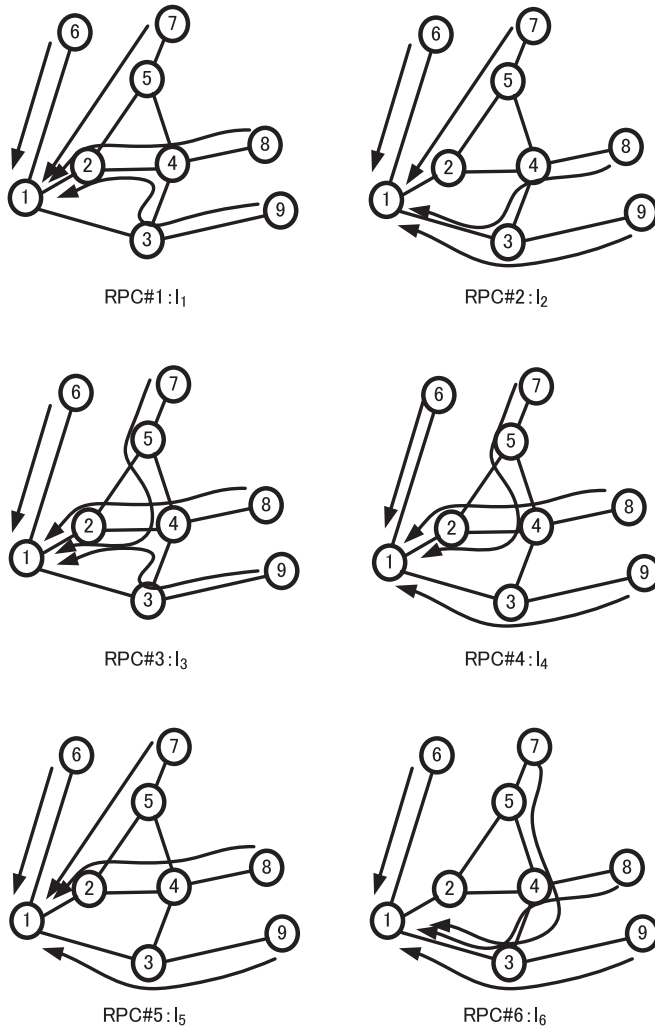


図6 会合帯同条件を満たすパス組

以上のパラメータ設定の下、2節の待受守備戦略のモデルと3節の動的派遣守備戦略のモデルを適用し比較してみる。

表2は守備兵力量 B_0 を変化させた場合の待受守備モデルと動的派遣守備モデルにおける攻撃側の最終残存量と攻撃側・守備側の最適戦略を書き出したものである。

表2 (a) 待受守備モデルの結果

B_0	残存数	$\pi(l)$						y_e			
		l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	(6,1)	(7,5)	(8,4)	(9,3)
30	40	0.174	0.069	0.169	0.084	0.086	0.418	6.7	7.4	9.2	6.7
40	28	0.174	0.069	0.169	0.084	0.086	0.418	6.7	11.6	15.0	6.7
62	1.6	0.173	0.069	0.170	0.085	0.086	0.418	6.7	24.2	24.5	6.7

表2 (b) 動的派遣守備モデルの結果

B_0	残存数	$\pi(l)$						y_e			
		l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	(6,1)	(7,5)	(8,4)	(9,3)
30	20	0.184	0.160	0.184	0.160	0.160	0.152	10	10	10	
40	2.5	0.182	0.163	0.182	0.163	0.163	0.147	13.86	13.9	11.9	0.4
41	1	0.192	0.163	0.174	0.163	0.164	0.143	25.99	5.7	9.0	0.4

表2で見られる特徴は下のよう分析でき、攻撃側情報を活用することの効果と価値を定量的に評価できる。

(1) 待受守備の場合（攻撃者の情報がない）

当然、守備兵力 B_0 の増加とともに攻撃側残存量は少なくなる。 $B_0 = 30$ で攻撃側総兵力 80 の半数 40 が残存するが、 $B_0 = 62$ で残存数がほぼゼロとなり攻撃の完全阻止が可能となる。

守備兵力量 B_0 にかかわらず、攻撃側による6組のRPC $l_1 \sim l_6$ の選択確率には全く変化がなく、 $\pi(l_1) = 0.174$, $\pi(l_2) = 0.069$, $\pi(l_3) = 0.169$, $\pi(l_4) = 0.084$, $\pi(l_5) = 0.086$, $\pi(l_6) = 0.418$ である。選択確率の比較的大きな l_1 , l_3 , l_6 のいずれも3つのノードからの侵入者が会合してキーウに入るPRCである。これにより、経由アークでの守備兵力を飽和させて集中突破し残存量を大きくできる。特に l_6 は攻撃側の経由アーク総数が最小であるため、守備側との衝突を

避けられるメリットがあり、一番大きな選択確率0.418をもつ。

守備側は、攻撃側が出発ノード6, 7, 8, 9を出発直後のアークに兵力を配備し、 $B_0 = 30$ のケースでは $y_{(6,1)} = 6.7$, $y_{(7,5)} = 7.4$, $y_{(8,4)} = 9.2$, $y_{(9,3)} = 6.7$ とする。このモデルでは攻撃側情報が得られないため、侵攻パスの不確実性からくる守備兵力の無駄な配備を嫌い、戦力交換比がやや低くても攻撃側が確実に通過する場所で待ち受ける作戦をとろうとする。 B_0 の増加とともにアーク(7,5), (8,4)での配備量のみが増加するが、これはノード6, 9からの侵入兵力 $R_6 = R_9 = 10$ には常に完全阻止ができており、大きな攻撃兵力をもつノード7, 8からの攻撃者に対応するためである。

(2) 動的派遣守備の場合（攻撃者のRPC情報を取得）

$B_0 = 30$ では攻撃側総兵力 80 の4分の1である20が残存するが、 $B_0 = 41$ で残存

数はほぼゼロとなり、攻撃の完全阻止が可能となる。攻撃側と守備側の戦略に関する特徴としては、6組のRPCに対してほぼ似たような選択確率がとられ、守備兵力はそのほとんどが待機場所 $W = \{1, 2, 3\}$ に待機となることである。実際の派遣計画として、どのRPC: l を攻撃側が侵攻しているかの情報を得て変更される各待機ノード r から各アーク e への派遣計画 $z_l(r, e)$ は、記載が煩雑となるのでここでは言及しない。

上の特徴は、どのRPCを選択して攻撃しても、守備側は攻撃情報を取得して柔軟に待機守備兵力を派遣できることからくる。 $R_6 = 10$ の攻撃兵力が必ず通過するアーク $(6, 1)$ へ若干の守備配備があるのは、最適守備戦略に幅があるためであり、必ずしもここに守備配備を置く必要はない。

(3) 2つのモデルの比較と攻撃側情報の価値

2つのモデルにおける攻撃の完全阻止のために必要な守備兵力量 $B_0 = 62$ と $B_0 = 41$ を比較すると、偵察用ドローン等で得る攻撃側情報は守備兵力量 21 に相当する価値のあることがわかる。

6. おわりに

この報告書では、交戦ゲームの理論モデルをウクライナ紛争初戦で戦われたキーウ攻防戦に適用して、戦闘の中で取得できる情報の価値を定量的に評価する手法を紹介した。現実の正確なデータが未だ分からないものの、取得情報の価値を自軍の兵力量に換算できることを示すことができた。また、パラメータ設定を用いたこのような情報価値の計算でなく、情報取得を陽にモデルに取り込んで分析するための新しい交戦ゲームモデルも提案した。

謝辞

この研究の一部は、2023年度筑波学院大学共同研究資金の補助を受けて実施されています。ここに感謝申し上げます。

参考文献

- [1] P.M. Morse and G.E. Kimball, *Methods of Operations Research*, MIT Press, Cambridge, 1951.
- [2] R. Hohzaki, *Inspection Games*, Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, pp.1–9, 2013.
- [3] M. Dresher, A sampling inspection problem in arms control agreements: A game theoretic analysis, Memorandum RM-2972-ARPA, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1962.
- [4] M. Thomas and Y. Nisgav, An infiltration game with time dependent payoff, *Naval Research Logistics Quarterly* **23**, pp.297–302, 1976.
- [5] A. Washburn and K. Wood, Two-person zero-sum games for network interdiction, *Operations Research* **43**, pp.243–251, 1995.
- [6] L.R. Ford and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University, NJ., pp.14–15, 1962.
- [7] A.W. McMasters and T.M. Mustin, Optimal interdiction of a supply network, *Naval Research Logistics Quarterly* **17**, pp.261–268, 1970.
- [8] J. Desai and S. Sen, A global optimization algorithm for reliable network design, *European Journal of Operational Research* **200**, pp.1–8, 2010.
- [9] N. Assimakopoulos, A network interdiction model for hospital infection control, *Computers in Biology and Medicine* **17**, pp.413–422, 1987.
- [10] R. Hohzaki and T. Chiba, An attrition game on an acyclic network, *Journal of the Operational Research Society*, **66**, pp.979–992, 2015.

- [11] R. Hohzaki and K. Sunaga, Attrition game models with asymmetric information on a network, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **59**, pp.195–217, 2016.
- [12] R. Hohzaki and T. Higashio, An attrition game on a network ruled by Lanchester’s square law, *Journal of the Operational Research Society*, **67**, pp.691–707. 2016.
- [13] R. Hohzaki and M. Tanaka, Effects of a player’s awareness of information acquisition and ability to change strategy in attrition games, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **60**, pp.353–378, 2017.
- [14] R. Hohzaki, L. Faugeras, T. Ouchi, An attrition game with multiple start and destination points, Proceedings of the 4th Asian Conference on Defense Technology (4th ACDT) on IEEE, CD-ROM S7-1, 2017.
- [15] P. Allen, Situational force scoring: Accounting for combined arms effects in aggregate combat models, RAND-note N-3423-NA, The RAND strategy assessment center, 1992.
- [16] J. Engel, A verification of Lanchester’s law, *Operations Research*, **2**, pp.163-171, 1954.
- [17] 工藤大誠, キーウ攻防戦へのゲーム理論の適用, 筑波学院大学 2022 年度卒業論文, 2023.
- [18] 日向野祐, 戦場における偵察用ドローン情報の効果, 筑波学院大学 2022 年度卒業論文, 2023.